Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al VI-lea

Problemă. Să se determine funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care verifică condiţiile:
punctele $A(a,f(a))$ şi $B(b,f(b))$ sunt situate pe graficul funcţiei f, dreapta AB intersectează axa Oy în punctul de ordonată $a^2\cdot b+a\cdot b^2$, $\forall a,b>0$ şi $f(1)=2$.

Soluţie: Ecuaţia dreptei AB este: $y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$. Punctul de coordonate $(0,a^2\cdot b+a\cdot b^2)$ aparţine dreptei AB $\Leftrightarrow a\cdot b\cdot(a+b)-f(a)=-a\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow$
$a\cdot b\cdot(b^2-a^2)=(b-a)\cdot f(a)-a\cdot f(b)+a\cdot f(a)\Leftrightarrow a\cdot b^3-a^3\cdot b=b\cdot f(a)-a\cdot f(b)\Leftrightarrow$
$b^2+\frac{f(b)}{b}=\frac{f(a)}{a}+a^2,\forall a,b>0.$

Rezultă că
$\frac{f(x)}{x}+x^2=k\Rightarrow f(x)=-x^3+kx,k\in\mathbb{R}.$
$f(1)=-1+k=2\Rightarrow k=3;$
$f(x)=-x^3+3x.$

Răspuns: $f(x)=-x^3+3x.$